

Aderência de tábuas de mortalidade versus ajustes de leis de mortalidade

Área Temática: Metodologias de Análises Atuariais

DOI: <https://doi.org/10.29327/1680956.11-69>

Carlos Alberto Gonçalo Barbosa

Universidade Federal da Paraíba

carlos.alberto2@academico.ufpb.br

Luiz Carlos Santos Júnior

Universidade Federal da Paraíba

lcsj@academico.ufpb.br

Resumo

O estudo analisa o impacto da escolha entre tábuas teóricas, validadas por testes estatísticos, e tábuas ajustadas por leis paramétricas (Gompertz, Makeham e Heligman-Pollard) na precificação de rendas atuariais, utilizando dados das tábuas chilenas B-2006_H e RV-2004. Aplicam-se testes Kolmogorov-Smirnov, qui-quadrado e métricas de erro (MAE, RMSE, R^2) para verificar a aderência aos dados observados e para a seleção dos modelos. Ajustam-se leis paramétricas às probabilidades de morte por sexo através do método de máxima verossimilhança, selecionando os melhores modelos com base nos critérios AIC e BIC. Em seguida, comparam-se as rendas atuariais derivadas de ambos os métodos utilizando os testes U de Mann-Whitney e a estatística d de Cohen, avaliando a significância e a magnitude dos efeitos. O estudo desenvolve dois cenários, variando a temporariedade (n), o diferimento (m) e a diferença etária entre segurados, mostrando que, embora os testes estatísticos clássicos indiquem diferenças não significativas, os efeitos práticos são substanciais, especialmente em produtos com longo período de diferimento e múltiplas vidas. Conclui-se que a metodologia atuarial escolhida influencia de forma relevante a precificação, sendo os modelos ajustados parametricamente mais adequados para precificar rendas e garantir sustentabilidade financeira de produtos atuariais.

Palavras-chave: Tábuas de mortalidade. Modelos paramétricos. Renda atuarial.

1 INTRODUÇÃO

Para a precificação de produtos sobre as vidas – seguros de pessoas e previdência –, os cálculos atuariais são realizados baseados na observação de eventos biométricos, sendo as tábuas biométricas as principais ferramentas constituídas para tal fim.

A avaliação desses eventos pode ser feita por meio de tábuas biométricas - tabelas que apresentam funções que denotam a ocorrência e a não ocorrência de eventos relativos à extensão da vida humana e sua higidez. Dentre os eventos de interesse atuarial no ramo vida, destacam-se a mortalidade geral de indivíduos, a entrada em invalidez, a mortalidade de inválidos e a morbidez.

As tábuas biométricas, de forma geral, podem ser obtidas: a) através da estimação de modelos; b) através do uso de tábuas teóricas pré-existentes, cuja adequação é verificada por testes de aderência (Wüthrich; Merz, 2022).

A mortalidade é o evento biométrico central na precificação de seguros de vida, pois está diretamente relacionada à cobertura básica desses produtos. No caso deste evento em particular, a sua avaliação é realizada através de uma tábua de vida. Na prática, o uso de uma tábua teórica não rejeitada em teste de hipótese possui, em geral, a vantagem de ser uma metodologia mais simples, barata e rápida; por outro lado, o uso de um ajuste paramétrico para construção de uma nova tábua pode viabilizar o uso de uma tábua mais adequada aos dados dos segurados. Assim, a escolha entre utilizar uma tábua teórica ou criar uma tábua por meio de um ajuste paramétrico pode impactar a precificação dos produtos e a sustentabilidade financeira de seguradoras e fundos de pensão (Dickson, Hardy e Waters, 2013).

Nesse contexto, dado que a prática de mercado adota uma tábua teórica (não rejeitada em teste de aderência) em detrimento da construção de uma nova tábua (empírica), objetiva-se, neste trabalho, avaliar o impacto da escolha entre tábuas, teóricas e empíricas, sobre a precificação de rendas. Os objetivos específicos, por sua vez, são: a) constatar, por meio de testes de hipóteses, quais das tábuas de mortalidade teóricas analisadas são consideradas aderentes à massa de segurados em questão; b) estimar, por meio das leis de mortalidade Gompertz, Makeham e Heligman-Pollard, as tábuas de mortalidade, segmentadas por sexo, com base nos dados observados dos segurados; c) comparar as rendas precificadas decorrentes do uso de tábuas teóricas e empíricas.

O presente trabalho é um produto do projeto de ensino chamado “cálculo atuarial e demografia”. Dentre os seus objetivos, destaca-se “incentivar e orientar o monitor a desenvolver suas habilidades de ensino e de pesquisa”. Neste sentido, este trabalho atende à demanda do projeto.

O estudo, além disso, contribui para o aprimoramento das práticas atuariais e incentiva a tomada de decisão bem embasada, de modo a contribuir de forma prática juntos ao setor de seguros e previdência. Nesta linha, Chaves (2017) destaca que o aumento da complexidade das atividades atuariais, aliado à crescente responsabilidade da profissão, vem elevando o nível de exigência das práticas atuariais. Portanto, a escolha adequada da metodologia se torna muito importante, influenciando diretamente a precificação e a solvência das seguradoras e fundos previdenciários.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E EMPÍRICO

2.1 Tempo futuro de vida, tábua de mortalidade e desconto financeiro

No cálculo atuarial do ramo vida, os atuários utilizam modelos estatísticos baseados em dados históricos para prever eventos biométricos – como mortalidade, morbidade, longevidade e recuperação –, a fim de estimar custos futuros, calcular prêmios, reservas e benefícios, e garantir a estabilidade financeira das seguradoras e fundos previdenciários (Rodrigues, 2012; Alba, 1965).

O principal instrumento é o tempo futuro de vida, representado pela variável aleatória $T(x)$, que indica o tempo futuro de vida de um indivíduo a partir de uma idade x (Bowers *et al.*, 1997). Essa variável fundamenta o desenvolvimento das tábuas de mortalidade e permite o cálculo de funções biométricas, como as funções densidade de probabilidade, de distribuição acumulada e de sobrevivência, essenciais para a precificação de seguros e a definição de benefícios (Dickson, Hardy e Waters, 2013).

A função de densidade $f_X(x)$ é exibida na equação (1), e descreve a probabilidade de um indivíduo falecer em um instante t .

$$f_X(x) = \frac{d}{dt} [P(T(x) \leq t)], \text{ para } t \geq 0 \quad (1)$$

A função de sobrevivência $s(x)$, de acordo com a expressão (2), representa a probabilidade de sobreviver até o tempo t .

$$s(x) = P[T(x) > t], \text{ para } t \geq 0 \quad (2)$$

Por meio das probabilidades (1) e (2), é possível calcular a função biométrica denominada força de mortalidade $\mu(x)$, definida em (3).

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{s(x)} \quad (3)$$

A equação (3), cuja função também é conhecida como taxa instantânea de mortalidade, é uma taxa que representa o risco de morte, em um pequeno intervalo de tempo e dado que o segurado de idade x sobreviveu até x (Bowers *et al.*, 1997). A força de mortalidade $\mu(x)$ permite que os atuários avaliem o risco de morte em momentos específicos (em tempos fracionados).

As funções biométricas: número de vivos à idade exata x (l_x), número de mortos entre as idades x e $x + 1$ (d_x) e a força de mortalidade, podem ser organizadas em tábuas de mortalidade, fornecendo uma representação prática dessas probabilidades ao longo de diferentes idades e sendo um dos instrumentos de base para os cálculos de prêmios de seguros, pois possibilita estimar a probabilidade de ocorrência de sinistros e os valores esperados de pagamentos futuros (Rodrigues, 2012; Bowers *et al.* 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013; Bravo, 2007).

Conforme Bowers *et al.* (1997), a relação entre $\mu(x)$ e l_x pode ser expressa conforme a expressão (4):

$$\frac{dl_x}{dx} = -\mu(x) \cdot l_x. \quad (4)$$

Isso significa que a variação do número de vivos em relação à idade x é proporcional à força de mortalidade, e o sinal negativo reflete a diminuição da sobrevivência à medida que a mortalidade age sobre a população. A partir da equação (4), é possível determinar l_x em termos de μ_x . Reorganizando-se as variáveis, tem-se (5) - para mais detalhamento do passo a passo, consulte Bowers *et al.* (1997):

$$l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_u \cdot du}. \quad (5)$$

Quando a força de mortalidade μ_x é constante, a função de sobrevivência l_x decresce exponencialmente com a idade. Em cenários mais realistas, onde μ_x varia com o tempo, é

necessário conhecer sua forma funcional ou a função de sobrevivência $S_x(t)$ para derivar l_x , cuja redução acompanha a intensidade acumulada do risco ao longo do tempo.

A partir de uma coorte inicial l_0 , constrói-se a tábua de mortalidade, da qual se derivam funções biométricas conforme demonstrado nas Equações (6), (7) e (8) deste trabalho. Essas tábuas viabilizam estimativas acerca dos eventos futuros, sendo fundamentais para os cálculos atuariais.

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (6)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (7)$$

$$p_x = 1 - q_x. \quad (8)$$

Sua escolha adequada, alinhada ao perfil populacional, permite ajustar os prêmios ao risco real, reduzindo desvios financeiros inesperados (Rodrigues, 2012; Oliveira *et al.*, 2023).

Outro componente fundamental é o fator de desconto financeiro (v), utilizado para ajustar os fluxos de caixa futuros ao valor presente, dada uma taxa de juros i : $v = \frac{1}{1+i}$:

Esse fator é especialmente útil para determinar as anuidades, pois permite trazer todos os pagamentos futuros ao valor atual. Assim, tanto a tábua de mortalidade quanto o fator de desconto são instrumentos centrais para o cálculo das rendas e dos prêmios correspondentes (Pires *et al.*, 2021).

2.2 Prêmios e rendas atuariais

O prêmio é o valor pago pelo segurado à seguradora para cobertura dos riscos, sendo calculado com base na tábua de mortalidade e em parâmetros definidos em contrato (Bowers *et al.*, 1997). Pode ser classificado como puro (considerando apenas o risco segurado) ou comercial (incluindo despesas administrativas e margens). Quanto à forma de pagamento, pode ser único ou periódico, conforme a estrutura contratual e o perfil do produto (Dickson; Hardy; Waters, 2013).

A precificação das rendas fundamenta-se nas anuidades, que representam o valor presente atuarial de uma série de pagamentos condicionados à sobrevivência do segurado, calculadas a partir dos fatores de desconto e das probabilidades extraídas das tábuas de mortalidade, especialmente l_x (Bowers *et al.*, 1997).

As anuidades podem se referir a uma vida ou a múltiplas vidas. (Ferreira, 2019; Pires *et al.*, 2021). Também podem ser classificadas segundo o início da cobertura (imediata ou diferida), a duração da cobertura (vitalícia ou temporária), a periodicidade dos pagamentos (anual ou fracionada), a quando se realizam os pagamentos (antecipada ou postecipadamente), além da constância ou não do valor do pagamento (Ferreira, 2019). A fórmula geral da anuidade para uma vida é:

$${}_m|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_tp_x \cdot v^t. \quad (9)$$

Quando o contrato envolve múltiplas vidas, os pagamentos podem depender da sobrevivência conjunta (os pagamentos cessam com o primeiro óbito) ou do último sobrevivente (os pagamentos cessam com o último óbito). A vida conjunta (representada por l_{xy}) assume independência entre as vidas de x e y , sendo:

$$l_{xy} = l_x \cdot l_y \quad (10)$$

Assim, a probabilidade de sobrevivência conjunta é:

$${}_t p_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = {}_t p_x \cdot {}_t p_y \quad (11)$$

A anuidade correspondente é representada por \ddot{a}_{xy} , com estrutura semelhante à anuidade de vida única:

$${}_m | \ddot{a}_{xy:\bar{n}} | = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_{xy} \cdot v^t \quad (12)$$

Já no status de último sobrevivente, aplicam-se:

$$l_{\overline{xy}} = l_x + l_y - l_{xy} \quad (13)$$

$${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy} \quad (14)$$

$${}_m | \ddot{a}_{\overline{xy}:\bar{n}} | = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_t p_{\overline{xy}} \cdot v^t. \quad (15)$$

Essas estruturas permitem adaptar contratos a diferentes contextos – conjugais, familiares, comerciais ou informais (Bravo, 2007; Dickson; Hardy; Waters, 2013) –, garantindo o pagamento enquanto um ou ambos os segurados permanecerem vivos, conforme as características da cobertura. Por fim, os valores obtidos para as anuidades constituem a base do Prêmio Único e Puro (PUP), essencial na precificação dos contratos.

O próximo tópico aborda as formas de obtenção da tábua de mortalidade, componente fundamental em conjunto com o fator de desconto financeiro para o cálculo do prêmio.

2.3 Metodologias para a tábua de mortalidade a ser adotada

Para formular modelos atuariais, utilizam-se tábuas de mortalidade construídas a partir da coleta e análise de dados demográficos, como censos e registros de óbito (Oliveira *et al.*, 2023). Essas metodologias incluem ajustes por leis matemáticas de mortalidade e testes estatísticos de aderência (Hogg; McKean; Craig, 2020), ambos essenciais para garantir a precisão das estimativas de risco ao longo do tempo.

Os testes de hipóteses desempenham papel crucial na atuária, permitindo validar as suposições feitas sobre parâmetros populacionais com base em amostras (Wüthrich e Merz, 2022; Hogg; McKean; Craig, 2020). O procedimento envolve formular hipóteses (nula e alternativa) e avaliar a probabilidade dos dados observados considerando a hipótese nula. A comparação do valor-p com o nível de significância leva à decisão sobre sua rejeição ou não, determinando a adequação dos dados ao modelo teórico.

Na atuária, esses testes verificam se os modelos de tábuas teóricas adotados se ajustam ao comportamento das mortes observadas, assegurando que os cálculos atuariais reflitam adequadamente a realidade demográfica (Oliveira *et al.*, 2023). Essa aderência contínua tende a contribuir para a maior precisão nas previsões e pode favorecer uma gestão de riscos mais eficiente.

As leis de mortalidade, por sua vez, descrevem como a taxa de morte varia com a idade e são fundamentais para a construção de tábuas biométricas em seguros e previdência. Desde o século XIX, essas leis evoluíram para refletir padrões demográficos e aprimorar previsões atuariais (Bowers *et al.*, 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013).

A Lei de Gompertz (1825) modela a mortalidade como função exponencial da idade, refletindo o envelhecimento biológico (Bravo, 2007). A Lei de Makeham (1860) aperfeiçoa esse modelo ao adicionar fatores externos constantes, como acidentes e doenças, sendo mais aplicável entre 30 e 80 anos (Lauretto, 2008). O modelo Heligman-Pollard (1980) é mais abrangente, segmentando a mortalidade em três componentes: infantil, juvenil (acidental) e senil. Suas variações (versões 1ª A, 1ª B, 2ª e 3ª) foram criadas para melhorar o ajuste em diferentes populações e contextos epidemiológicos, com foco especial nas idades avançadas (Bravo, 2007).

Modelos estocásticos como Lee-Carter e CBD (Cairns-Blake-Dowd) surgiram para captar as mudanças temporais na mortalidade. O primeiro separa os efeitos do tempo e da idade, enquanto o segundo foca na longevidade em idades avançadas (Lee e Carter, 1992; Cairns *et al.*, 2006).

A escolha da lei adequada impacta diretamente a precificação e a solvência de produtos financeiros e previdenciários (Oliveira *et al.*, 2023). Apesar de seus avanços, esses modelos ainda enfrentam desafios, como a variabilidade entre grupos populacionais e a confiabilidade dos dados.

2.4 Estudos anteriores

Os estudos sobre tábuas de mortalidade têm explorado diferentes abordagens para a sua obtenção, tábuas teóricas e leis de mortalidade ajustadas, e contextos aplicados para a construção de modelos mais precisos e sustentáveis em produtos atuariais. Além disso, pesquisas recentes ressaltam a importância de incorporar fatores socioeconômicos, históricos e geracionais na modelagem da mortalidade, contribuindo para a melhoria da acurácia dos modelos atuariais (Queiroz; Gonzaga; Lima, 2013).

Em um estudo mais voltado para o contexto brasileiro, Dias (2014) analisou a mortalidade dos beneficiários do plano de saúde Pró-Saúde. O objetivo foi comparar a aderência das tábuas de mortalidade AT-83 e AT-2000 ao perfil populacional dos segurados do plano. Sua pesquisa, realizada em um contexto de saúde suplementar, revelou que a tábua AT-83 era mais adequada para o perfil masculino, enquanto a AT-2000 ajustava-se melhor ao perfil feminino. Os resultados apontaram que o uso de tábuas de mortalidade desatualizadas pode

levar à super ou subprecificação dos produtos atuariais, comprometendo a sustentabilidade financeira das seguradoras.

Em outra pesquisa, McCarthy e Mitchell (2000) realizaram uma análise comparativa em três países com diferentes perfis demográficos — Estados Unidos, Reino Unido e Austrália — para avaliar como as suposições de mortalidade impactam a precificação de anuidades. O estudo foi conduzido utilizando dados de mortalidade nacionais e tábuas atuariais aplicadas nos respectivos mercados. Seus resultados demonstraram que países com maior expectativa de vida, como o Reino Unido, tendem a subestimar os riscos de longevidade quando utilizam tábuas desatualizadas. Esse achado é crucial, pois indica que variações nas suposições de mortalidade podem gerar grandes discrepâncias no valor das anuidades, especialmente em mercados onde a longevidade está aumentando rapidamente. Além disso, indicou que ajustes periódicos nas tábuas são eficientes para mitigar riscos.

Bravo (2007) conduziu uma análise aprofundada que, dentre outras coisas, comparou tábuas tradicionais com modelos estocásticos de mortalidade aplicados ao mercado de seguros e pensões de Portugal. Focado no impacto das incertezas sobre a longevidade no cálculo de benefícios futuros, utilizou um modelo estocástico que considerava variações anuais nas taxas de mortalidade e comparou seus resultados com as tábuas de mortalidade fixas aplicadas tradicionalmente no mercado. Os resultados indicaram que os modelos estocásticos proporcionam previsões mais acuradas e são capazes de ajustar-se às mudanças demográficas, minimizando os riscos de subprecificação dos produtos atuariais.

Em uma aplicação focada nas projeções de longo prazo, Mosher (2022) estudou a necessidade de tábuas prospectivas para a durabilidade dos sistemas previdenciários em economias desenvolvidas. Foi realizado na Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), envolvendo a análise de dados demográficos e projeções de mortalidade futura para vários países membros. O foco estava em como a incorporação de melhorias nas expectativas de vida pode evitar subestimações no cálculo dos benefícios de aposentadoria. Mosher concluiu que tábuas estáticas, que não consideram projeções futuras, comprometem a autossuficiência previdenciária a longo prazo. Embora seu estudo não tenha envolvido diretamente comparações de resultados práticos de tábuas ajustadas, ele reforça a importância de constantemente revisar e ajustar as tábuas de mortalidade.

Em estudos metodológicos recentes ampliam essa discussão. Cui (2008) propõe uma nova abordagem para a precificação do risco de longevidade, enfatizando que a escolha do modelo impacta significativamente o equilíbrio financeira dos produtos atuariais. Nesse sentido, Brouhns, Denuit e Vermunt (2002) apresentaram metodologia de regressão log-bilinear de Poisson, evidenciando a relevância de métodos estatísticos robustos na projeção de tábuas de vida. Em complemento, Boateng, Omari-Sasu e Boateng (2024) destacam, em sua revisão sistemática, que incorporar efeitos de coorte nos modelos estocásticos para capturar variações geracionais, aprimoram a acurácia das projeções, especialmente para a população idosa.

O presente estudo amplia os achados de autores como Dias (2014), McCarthy e Mitchell (2000), Bravo (2007) e Mosher (2022), integrando ainda as contribuições de Cui (2008), Brouhns, Denuit e Vermunt (2002), Boateng, Omari-Sasu e Boateng (2024), e Queiroz, Gonzaga e Lima (2013), ao comparar, no âmbito do mercado nacional, as tábuas oriundas de tábuas teóricas e aquelas decorrentes de estimativas de leis de mortalidade ajustadas. Ao adotar uma abordagem empírica, o estudo pretende contribuir para a literatura ao oferecer visões mais práticas sobre o impacto das diferentes metodologias para obtenção da tábua sobre a precificação atuarial de rendas.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo, detalha-se o percurso metodológico, compreendendo o tipo de pesquisa, a coleta e o tratamento dos dados, testes de aderência, ajuste paramétrico de tábuas e a comparação entre as rendas calculadas a partir das tábuas resultantes dos testes e dos ajustes paramétricos. Todas as análises e simulações foram conduzidas utilizando o *software* estatístico R.

3.1 Tipos de pesquisa e base de dados

Os dados atuariais utilizados foram extraídos do Human Mortality Database (HMD), abrangendo informações detalhadas sobre mortalidade por idade e sexo do Chile (período 2012-2020). Esses registros são oriundos de fontes oficiais, como DEIS e INE, reconhecidos por sua alta qualidade e confiabilidade (Human Mortality Database, s.d.), com certificação médica dos óbitos superiores a 90%.

A pesquisa possui abordagem quantitativa, natureza aplicada, objetivos descritivo e inferencial e delimitação temporal de perspectiva longitudinal.

Os dados utilizados para a realização dos cálculos atuariais deste estudo foram extraídos do *Human Mortality Database* (HMD), com foco exclusivo nas informações referentes ao Chile. O HMD disponibiliza as tábuas de mortalidade próprias segmentadas por grupos, aos quais foram consideradas as informações das tábuas de vida organizadas conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 – Informações sobre as variáveis das tábuas de vida (feminino, masculino e total)

Variável	Descrição	Tipo
Ano	Ano isolado ou intervalo de anos para dados de período e coorte (1992–2020).	Discreta
Idade	Faixa etária para intervalo de n anos, de x a $x+n$.	Discreta
$m(x)$	Taxa central de mortalidade entre as idades x e $x+n$.	Contínua
$q(x)$	Probabilidade de morte entre as idades x e $x+n$.	Contínua
$a(x)$	Média, em anos, de tempo vivido pelos que morrem no intervalo x – $x+n$.	Contínua
$l(x)$	Número de sobreviventes em idade exata x .	Discreta
$d(x)$	Número de óbitos no intervalo x – $x+n$.	Discreta
$L(x)$	Anos-pessoa vividos no intervalo x – $x+n$.	Contínua
$T(x)$	Anos-pessoa remanescentes após a idade exata x .	Contínua
$e(x)$	Expectativa de vida na idade exata x (em anos).	Contínua

Fonte: Elaboração Própria, com base nas tábuas de vida do Chile disponibilizado pelo HMD (2025).

Para fins de alcançar o objetivo do estudo, não são utilizadas as tábuas próprias descritas acima. Utilizam-se apenas as informações de ano (2012-2020), idade e q_x , como sendo os dados históricos de uma instituição de seguros ou previdência.

A robustez dos dados chilenos deve-se, em grande parte, à utilização de fontes oficiais, como o Departamento de Estatísticas e Informações de Saúde (DEIS) e o Instituto Nacional de Estatísticas (INE) (Human Mortality Database, s.d.). Esses órgãos asseguram registros precisos, apresentando baixa subnotificação de nascimentos – índices inferiores a 5,4% – e elevada certificação médica dos óbitos – superiores a 90%.

No tratamento dos dados para este estudo, optou-se por delimitar o período de 2012 a 2020 da base de dados original, de modo a assegurar a coerência e a plausibilidade estatística dos registros possibilitando a identificação de tendências e de variações na estrutura de

∞

mortalidade ao longo dos anos. Na próxima subseção, apresentam-se os métodos aplicados à elaboração e ao ajuste das tábuas.

3.2 Tipos de análise

A análise está organizada em três etapas interdependentes: (i) verificação da aderência e seleção das tábuas teóricas de mortalidade, (ii) estimação paramétrica (leis de mortalidade) e seleção de tábuas ajustadas e (iii) comparação das rendas atuariais oriundas das duas abordagens.

3.2.1 Testes de aderência de tábuas de mortalidade

O cuidado com a tábua adequada escolhida é indispensável na redução de possíveis distorções no processo de precificação de produtos atuariais. Segundo Booth e Tickle (2008), embora a abordagem extrapolativa de modelagem seja amplamente utilizada, muitas vezes ela não passa por uma avaliação crítica aprofundada sobre a sua capacidade de reproduzir a realidade.

Inicialmente, verifica-se a normalidade dos dados pelo teste Shapiro-Wilk – cuja a hipótese nula (H_0) assume que os dados seguem uma distribuição normal – é empregado em amostras menores, considerando que, de acordo com Spiegel, Schiller e Srinivasan (2013), esse teste se mostra bastante sensível a desvios da distribuição normal. A estatística do teste (W) é calculada pela Equação (16).

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i q_{x(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (q_{x,i} - \bar{q}_x)^2} \quad (16)$$

Em que $\sum_{i=1}^n a_i q_{x(i)}$ corresponde ao somatório ponderado dos valores de probabilidade de morte observado em ordem crescente, enquanto o denominador representa a soma dos quadrados do desvio de cada valor em relação à média.

Uma vez realizado o teste de Shapiro-Wilk e rejeitada a hipótese de normalidade, a aderência das tábuas de mortalidade é verificada por meio de testes não paramétricos, como os testes qui-quadrado (χ^2) e o Kolmogorov-Smirnov (KS). Suas estatísticas são apresentadas na Tabela 1 e maiores detalhes podem ser consultados em Bravo (2007).

Tabela 1 – Estatísticas dos testes de aderência de tábuas

Teste de aderência	Estatística
Qui-quadrado	$\chi^2 = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{(d_x - d_x^{exp})^2}{Var(d_x)}$
KS	$W^{KS} = Dev^{max} \left(\frac{D^{act} D^{exp}}{D^{act} + D^{exp}} \right)^{\frac{1}{2}}$

Fonte: elaboração própria, a partir de Bravo (2007).

O teste χ^2 postula a H_0 de que não há diferença significativa entre as frequências observadas e as frequências esperadas das probabilidades de morte (ou seja, a tábua testada é aderente ao conjunto de dados). Assim, para avaliar a qualidade do ajuste das tábuas à

mortalidade real, comparamos, para cada idade x , o quadrado da diferença entre o número observado d_x e o esperado d_x^{exp} , dividido pela variância de d_x .

Valores elevados de χ^2 indicam uma maior discrepância entre as amostras, enquanto valores menores sugerem que o ajuste entre os dados observados e esperados é adequado. Esses valores são comparados com uma distribuição χ^2 para verificar a significância estatística dos resultados, considerando um nível de significância predefinido.

O teste KS também formula H_0 afirmando que a tábua testada é aderente ao conjunto de dados. Esse teste pode ser aplicado para examinar se há desajustes marcantes na distribuição acumulada entre dados e estimativas (Pires *et al.*, 2018). Valores altos de W^{KS} indicam que a diferença entre as distribuições não se deve ao acaso, reforçando a rejeição da hipótese de que observados e esperados seguem o mesmo padrão (Bravo, 2007). A probabilidade $p(W^{KS})$ pode ser aproximada ou obtida por tabelas específicas de KS.

Depois de identificadas as tábuas aderentes, utilizam-se medidas de erro para a seleção da tábua considerada mais aderente, tais quais Erro Quadrático Médio (*RMSE*) e o Erro Absoluto Médio (*MAE*).

Os testes χ^2 e KS informam se as tábuas testadas são aderentes, mas não informam qual dentre as aderentes seria melhor. Para este fim, utilizam-se métricas de erro, tais quais o *RMSE* e o *MAE*, expressos na Tabela 2. Maiores detalhes podem ser consultados em Bravo (2007).

Tabela 2 – Formulações das métricas de erro usadas para a seleção de tábuas aderentes	
Métrica de erro	Formulação
Erro Quadrático Médio (<i>RMSE</i>)	$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_{x(i),obs} - q_{x(i),teo})^2}$
Erro Absoluto Médio (<i>MAE</i>)	$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_{x(i),obs} - q_{x(i),teo} $

Fonte: elaboração própria, a partir de Bravo (2007).

O *RMSE*, capta a magnitude dos desvios, atribuindo maior peso aos erros mais expressivos devido à elevação ao quadrado. Já o *MAE* mede a discrepância média em termos absolutos, conforme McCarthy e Mitchell (2000), e, por não elevar as diferenças ao quadrado, torna-se menos sensível a valores extremos. Ao comparar *RMSE* e *MAE*, pode-se ter uma visão ampla de como os modelos representam, em média, a distribuição dos eventos de mortalidade e se existem desvios substanciais que afetam a precisão do ajuste.

O resultado dessa etapa determina o grau de adequação das tábuas propostas, conferindo uma base estatística para decidir se é necessário ajustar ainda mais os modelos ou substituir aqueles que não se mostrem eficazes em representar a realidade observada.

3.2.2 Leis de mortalidade

No âmbito desta análise, são ajustadas três leis de mortalidade, já discutidas anteriormente na seção 2.3.2, por serem amplamente utilizadas em diversos estudos atuariais e reconhecidas pela simplicidade e/ou capacidade de representar diferentes fases da vida – Lei de Gompertz, Lei de Makeham e Lei de Heligman-Pollard –, conforme destacado por Bowers *et al.* (1997), Dickson, Hardy e Waters (2013) e Bravo (2007). Em complemento, utilizam-se as

funções biométricas l_x e d_x dadas pela função *MortalityLaw*, presente no pacote *MortalityLaws* do R, de autoria de Pascariu (2024).

Tabela 3 – Função biométrica ajustada por lei de mortalidade

Lei de mortalidade	Função biométrica ajustada
Makeham	$\mu(x) = Be^{Cx}$
Gompertz	$\mu(x) = A + Be^{Cx}$
Helligman-Pollard 1ª Lei (versão B)	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + GH^x}$
Helligman-Pollard 2ª Lei	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x}$
Helligman-Pollard 3ª Lei	$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^{x^K}}{1 + GH^{x^K}}$

Fonte: elaboração própria, a partir da função *availableLaws* do pacote *MortalityLaws* (Pascariu, 2024).

Na formulação da Lei de Gompertz, exibida na Tabela 3, tem-se: $\mu(x)$ é a força de mortalidade à idade exata x ; B é o parâmetro que ajusta a mortalidade inicial; C é o parâmetro que representa a taxa de aumento exponencial da mortalidade com a idade. Essa lei clássica assume que o risco de mortalidade aumenta de forma exponencial com a idade, refletindo o aumento progressivo no risco de morte (Alba, 1965), além de ser amplamente usada em seguros de vida pela simplicidade e eficiência em idades avançadas (Bowers *et al.*, 1997; Dickson; Hardy; Waters, 2013; Wüthrich e Merz, 2022).

A Lei de Makeham apresentada na Tabela 3, estende Gompertz ao incluir o parâmetro A , que representa o risco de morte que independe da idade, B e C continuam a ajustar a mortalidade relacionada à idade, como na Lei de Gompertz. Com isso, o modelo se torna mais flexível para populações expostas a riscos externos significativos, como acidentes ou doenças crônicas, em todas as idades (Alba, 1965; Dickson; Hardy; Waters, 2013; Bravo, 2007; Rodrigues, 2012).

Por fim, nas formulações da Lei de Heligman-Pollard, vide Tabela 3, tem-se que: A , B e C são parâmetros que ajustam a mortalidade em idades jovens; D , E e F modelam a mortalidade em idades intermediárias, particularmente a parte central da curva de mortalidade; G , H e K capturam o comportamento da mortalidade em idades avançadas, onde a taxa de mortalidade aumenta de forma exponencial (Heligman; Pollard, 1980). A Lei de Heligman-Pollard oferece, assim, uma modelagem mais complexa, ao dividir a mortalidade em três componentes: mortalidade infantil, mortalidade por causas acidentais na juventude e mortalidade em idades avançadas. Este modelo é mais flexível e abrangente, sendo capaz de ajustar a mortalidade em diferentes faixas etárias com maior exatidão (Heligman; Pollard, 1980). Bravo (2007) apresenta três versões da Lei de HP, cada uma delas incorporando refinamentos adicionais para diferentes contextos populacionais: a 1ª Lei (versão B), a 2ª Lei e a 3ª Lei (ver a seção 2.3.2 para mais detalhes).

Após a fase de ajustes das leis de mortalidade, é necessário verificar a sua adequabilidade e realizar a seleção dos modelos ajustados, de modo que se minimizem erros e se garanta uma maior confiabilidade nas projeções (Guimarães, 2008). Para nortear essa seleção, são adotados os Critérios de Informação de Akaike (*AIC*) e Bayesiano (*BIC*), que mensuram tanto o grau de adequação do modelo quanto a penalização pela presença de muitos parâmetros.

$AIC = 2k - 2 \ln(L)$ usa k para representar a quantidade de parâmetros do modelo e emprega $\ln(L)$ como a função de verossimilhança, ou seja, a probabilidade de observar os dados considerando determinada configuração de parâmetros. Já $BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L)$, introduz uma penalidade mais severa à complexidade ao multiplicar k pelo logaritmo do tamanho amostral n . Ambos os critérios indicam melhor desempenho para modelos com valores mais baixos, refletindo melhor equilíbrio entre ajuste e simplicidade. Enquanto o AIC tende a favorecer modelos com maior capacidade preditiva, o BIC prioriza estruturas mais enxutas (Booth; Tickle, 2008). Contudo, como esses critérios não são suficientes para quantificar diretamente os erros cometidos na estimação (Guimarães, 2008), faz-se necessária a verificação do grau de precisão na estimação das probabilidades de morte, o que remete ao uso das métricas de erro já apresentadas na subseção 3.2.1: $RMSE$, MAE e, adicionalmente, o R^2 (Coeficiente de Determinação).

R^2 , conforme a Equação (31), mostra o quanto o modelo consegue explicar os valores observados. Quanto mais próximo de 1, maior a capacidade explicativa.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{x(i),obs} - a_{x(i),teo})^2}{\sum_{i=1}^n (a_{x(i),obs} - \bar{a}_{x(i)})^2} \quad (31)$$

$a_{x(i),obs}$ corresponde ao valor real observado para a mortalidade no ponto i , $a_{x(i),teo}$ é o valor estimado pelo modelo e $\bar{a}_{x(i)}$ indica a média das observações.

Essa abordagem busca assegurar que a tábua de mortalidade escolhida seja estatisticamente compatível com a amostra analisada e adequada ao contexto atuarial, o que pode influenciar a consistência dos cálculos financeiros e a coerência da tarifação dos produtos.

3.2.3 Comparação entre rendas calculadas pelas diferentes tábuas

Para verificar se essas diferenças entre anuidades são significativas, o estudo considerou uma taxa de juros de 4% ao ano, para o cálculo das rendas, e ferramentas de comparação (teste, medidas de efeito e métricas de erro), cujas formulações estão disponíveis na Tabela 4.

Tabela 4 – Ferramentas de comparação de rendas obtidas (teste de aderência x estimação)

Ferramenta	Formulação
Razão entre anuidades obtidas (RA)	$RA = \frac{a_x^{teo}}{a_x^{aju}}$
Estatística do teste Mann-Whitney (U)	$U = n_{teo} n_{adj} + \frac{n_{teo}(n_{teo} + 1)}{2} - R_{teo}$
D de Cohen (d)	$d = \frac{a_{x,teo} - \bar{a}_{x,adj}}{\sigma_p}$
Desvio-padrão combinado das rendas (σ_p)	$\sigma_p = \sqrt{\frac{(n_{teo} - 1)Var[a_{x,teo}] + (n_{adj} - 2)Var[a_{x,adj}]}{n_{teo} + n_{adj} - 2}}$

Fonte: Elaboração própria (2025).

Na razão entre as anuidades obtidas (RA), a_x^{teo} é a renda calculada pela tábua aderente e a_x^{aju} é a renda calculada pelas tábuas das leis de mortalidade. $RA < 1$ indica que a tábua teórica

resulta em rendas menores; $RA > 1$, indica uma sobreprecificação de a_x^{teo} em relação a a_x^{aju} . Essa razão fornece uma comparação direta para determinar se a adoção de leis de mortalidade distintas tende a encarecer ou baratear os prêmios pagos.

No teste de Mann-Whitney, tem-se que R_{teo} corresponde à soma dos postos atribuídos às rendas do grupo teórico e n_{teo} e n_{adj} , ao número de rendas calculadas (tamanho amostral) em cada metodologia. O teste, neste caso, verifica se as rendas resultantes de duas tábuas de mortalidade (tábua padrão de mercado versus tábua ajustada) são iguais, sem assumir que as rendas seguem distribuição normal.

Além de verificar a significância estatística, é importante considerar o tamanho do efeito, que mede a magnitude da diferença entre as médias das rendas. O d de Cohen é frequentemente utilizado para isso e pode ser obtido pela expressão disponível na Tabela 4. Os valores de d típicos, são: se $d = 0,2$, tem-se efeito pequeno; se $d = 0,5$, efeito médio; se $d = 0,8$, efeito grande. Por fim, no desvio padrão combinado das rendas σ_p , conforme escrito na Tabela 4, $Var[a_{x,teo}]$ e $Var[a_{x,adj}]$ são as variâncias das rendas oriundas das duas tábuas. Em conclusão, a combinação da RA, do teste de Mann-Whitney e do d de Cohen permite avaliar se as rendas decorrentes das tábuas teóricas e ajustadas diferem significativamente.

4 RESULTADOS

Apresentam-se os resultados da análise dos dados de mortalidade do HMD para o Chile, com verificação da normalidade, aderência das tábuas e ajuste de modelos paramétricos, avaliando impactos nas rendas atuariais.

4.1 Obtenção das tábuas de mortalidade

Esta subseção detalha o processo de obtenção das tábuas utilizadas no estudo, desde o tratamento inicial dos dados até a aplicação dos modelos de ajuste. Na subseção 4.1.1, trata-se da filtragem e da verificação dos pressupostos estatísticos – já descritos na seção 3.2. Em 4.1.2, apresentam-se os resultados dos testes de aderência e métricas de erro. Por fim, a subseção 4.1.3 aborda os ajustes dos modelos paramétricos, com base nos critérios de seleção aplicados.

4.1.1 Base de dados e verificação de normalidade dos dados

A divisão por períodos e por sexo permitiu observar transformações estruturais nas curvas de mortalidade, refletindo fatores demográficos e socioeconômicos, além de reforçar diferenças já consolidadas entre os sexos (Dias, 2014; Pires *et al.*, 2018).

Os resultados, expostos na Tabela 5, resume os resultados do teste de Shapiro-Wilk, com valores- p muito inferiores ao nível de significância de 5%.

Tabela 5– Máximos p-valores de W por sexo

Sexo	Estatística W
Feminino	$1,55 \cdot e^{-16}$
Masculino	$7,89 \cdot e^{-16}$
Total	$3,03 \cdot e^{-16}$

Fonte: Elaboração Própria (2025).

Os resultados indicam forte rejeição da hipótese de normalidade dos resíduos — conforme mostrado na Tabela 5. Tais resultados corroboram a evidência de que, em contextos atuariais, os dados frequentemente não se comportam de forma paramétrica, como também observado em outras análises estatísticas (Hogg; McKean; Craig, 2020), sobretudo em faixas etárias extremas, exigindo métodos mais adequados. Diante disso, foram utilizados testes de aderência KS e χ^2 , além das métricas *MAE* e *RMSE*, conforme indicado por Bowers *et al.* (1997) e Wüthrich e Merz (2022).

4.1.2 Resultados dos testes de aderência

Foram utilizadas as tábuas de origem chilena, extraídas do Society of Actuaries (s.d.), para realizar os testes de aderência em relação aos dados empíricos do Chile para 9 tábuas de mortalidade – M-70 KW, M-95 M, M-95 H, MI-2006 M, MI-2006 H, B-2006 M, B-2006 H, Tabla de Mortalidad RV-2004 – Mujeres e Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres. Os testes KS e χ^2 foram aplicados com o mesmo nível de significância de 5%.

Os testes χ^2 mostraram p-valor igual a 1 para todas as tábuas, indicando ajuste ótimo. Já no KS foi mais seletivo. Por este teste, e por apresentarem valor p superior a 0,05, as tábuas B-2006 H, Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres e M-95 M foram aderentes aos dados femininos; as tábuas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres foram aderentes aos dados masculinos; as tábuas Tabla de Mortalidade R-2004 – Hombres, B-2006 M e B-2006 H foram aderentes aos dados de ambos os sexos.

Complementarmente, a Tabela 6 apresenta as métricas *MAE*, *RMSE* e R^2 , por sexo, das tábuas consideradas aderentes pelo teste KS.

Tabela 6 – As 5 primeiras tábuas aderentes com resultados das métricas por sexo

Sexo	Tábua	MAE	RMSE	R^2
Feminino	B-2006 H	0,0045	0,0073	0,9977
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,0076	0,0122	0,9943
	M-95 M	0,0110	0,0448	0,9079
Masculino	B-2006 H	0,0170	0,0338	0,9496
	Tabla de Mortalidad RV-2004 - Hombres	0,0113	0,0212	0,9843
Ambos os sexos	B-2006 H	0,0019	0,0035	0,9995

Fonte: Elaboração Própria (2025).

Dentre as tábuas femininas, B-2006 H sobressai pelos menores *MAE* (0,0045) e *RMSE* (0,0073) e alto R^2 (0,9977), refletindo excelente ajuste aos dados empíricos. No masculino, a Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres obteve o melhor equilíbrio entre erro (*MAE* = 0,0113; *RMSE* = 0,0212) e explicação estatística (R^2 = 0,9843). Para o total, B-2006 H novamente lidera (*MAE* = 0,0019; *RMSE* = 0,0035; R^2 = 0,9995). Assim, essas três tábuas apresentam os indicadores de erro mais baixos e o melhor ajuste, configurando-se como referências ideais para as comparações que se seguem.

4.1.3 Ajustes e seleção das leis de mortalidade

Foram ajustadas leis de mortalidade clássicas — Gompertz, Makeham e as versões da lei de HP — com base na técnica de máxima verossimilhança. Os modelos foram avaliados pelos critérios de informação, além das métricas, conforme a Tabela 7.

Tabela 7 – Resultado dos melhores modelos ajustados pelas métricas por sexo

Sexo	Modelo	AIC	BIC	RMSE	MAE	R ²
Feminino	HP – 1ª Lei Versão B	-735,3203	-713,6441	0,0339	0,0094	0,9624
Masculino	HP – 2ª Lei	-738,1605	-713,7747	0,0332	0,0116	0,9654
Total	HP – 2ª Lei	-738,1038	-713,7180	0,0332	0,0114	0,9625

Fonte: Elaboração Própria (2025).

Os ajustes revelam perfis distintos de mortalidade em cada grupo: para as mulheres, a 1ª Lei Versão B equilibra com maestria simplicidade e fidelidade, capturando as nuances das idades sem sobreajustar; já para os homens, a 2ª Lei – com um grau extra de flexibilidade – consegue reduzir ainda mais os desvios. Para o grupo total, o mesmo modelo da 2ª Lei mantém seu desempenho de ponta. Isso demonstra que diferentes versões da lei de HP se adaptam melhor a perfis distintos de mortalidade, justificando a escolha específica por grupo (Bowers *et al.*, 1997; Wüthrich; Merz, 2022). Com base nessas evidências, a próxima seção analisará o impacto da escolha entre tábuas teóricas e ajustadas na precificação das rendas atuariais.

4.2 Impacto da tábua adotada sobre o cálculo das rendas atuariais

Esta subseção avalia como a escolha entre tábuas teóricas validadas por testes de aderência e tábuas ajustadas por leis de mortalidade impacta o cálculo das rendas atuariais. Os produtos atuariais são definidos pelos parâmetros: temporariedade (n), diferimento (m), e diferença etária entre segurados ($y = x + \text{constante}$). Foram avaliados dois cenários distintos.

O Cenário 1 utiliza parâmetros moderados: temporariedade curta ($n=5$), diferimento intermediário ($m=4$) e pequena diferença etária ($y=x+3$). A Tabela 8 resume as estatísticas descritivas da RA.

Tabela 8 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 1)

Produto	Feminino		Masculino		Total	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP
\ddot{a}_x	0,99	0,08	0,67	0,20	10,28	0,09
$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	10,10	0,05	0,91	0,13	10,19	0,06
$m \ddot{a}_x$	10,96	0,43	0,58	0,29	12,92	11,20
$m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$	10,47	0,24	0,79	0,27	10,86	0,35
a_x	10,16	0,14	0,64	0,23	10,78	0,24
$a_{x:\overline{n} }$	10,21	0,10	0,87	0,18	10,37	0,14
$m a_x$	11,23	0,54	0,56	0,30	13,77	15,16
$m a_{x:\overline{n} }$	10,54	0,28	0,77	0,29	10,98	0,41
\ddot{a}_{xy}	0,99	0,08	0,67	0,19	10,26	0,09
$\ddot{a}_{xy:\overline{n} }$	10,10	0,05	0,91	0,13	10,19	0,06
$m \ddot{a}_{xy}$	10,91	0,43	0,57	0,28	12,89	11,21
$m \ddot{a}_{xy:\overline{n} }$	10,47	0,24	0,79	0,27	10,85	0,35
a_{xy}	10,12	0,14	0,64	0,22	10,75	0,24
$a_{xy:\overline{n} }$	10,20	0,10	0,87	0,18	10,37	0,14
$m a_{xy}$	11,18	0,54	0,56	0,29	13,73	15,16
$m a_{xy:\overline{n} }$	10,53	0,28	0,77	0,29	10,98	0,41
$\ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,79	0,22	0,97	0,06
$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n} }$	10,00	0,00	1,00	0,00	10,00	0,00
$m \ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,78	0,22	0,97	0,07
$m \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00

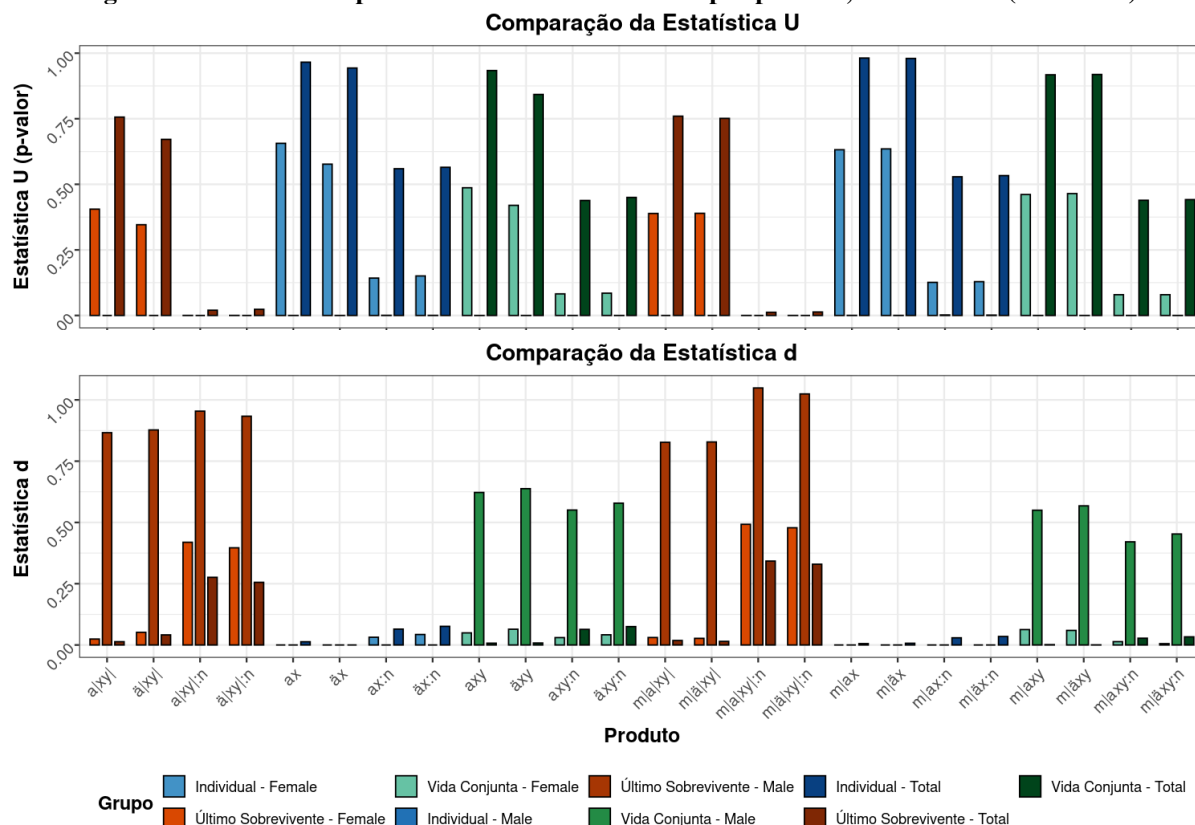
Fonte: Elaboração Própria (2025).

As anuidades imediatas mantêm médias muito próximas de 1 (entre 0,96 e 1,10) e desvios padrão baixos ($\leq 0,23$), refletindo grande estabilidade na fase inicial de pagamentos. Já as anuidades com diferimento têm médias mais elevadas (até 13,77) e maior dispersão (DP até 15,16), sinalizando maior dispersão ao postergar os fluxos. As anuidades de último sobrevivente sem diferimento apresentam estabilidade marcante, com médias próximas de 1 e desvios padrão praticamente nulos ($\leq 0,06$).

Esses extremos ilustram como o nível de diferimento e o tipo de produto impactam diretamente a dispersão da razão de anuidade, ainda que todas as estruturas permaneçam estatisticamente sólidas para fins de precificação (Dickson; Hardy; Waters, 2013; Wüthrich; Merz, 2022).

Portanto, para os produtos individuais e de vida conjunta, apresentam diferenças apenas nas idades mais avançadas. Já as anuidades de último sobrevivente exibem oscilações menos abruptas, o que reforça a tese de que essa estrutura é menos sensível à modelagem da longevidade extrema (Boateng; Omari-Sasu; Boateng, 2024). Em complemento, a Figura 1 mostra os valores da estatística U de Mann-Whitney e da estatística d de Cohen.

Figura 1 – Gráficos comparativos das estatísticas U e d por produto, sexo e status (Cenário 1)



Fonte: Elaboração Própria (2025).

A Figura 2 exibe estatísticas U e d . Para anuidades individuais e de vida conjunta, as diferenças entre métodos de precificação são estatisticamente desprezíveis (U alto, d próximo de zero). Contudo, para anuidades de último sobrevivente, especialmente masculinas, há

discrepâncias consideráveis (d até 1,05), indicando efeitos práticos relevantes devido à alta exposição à longevidade extrema (Ríos e Peña, 2020). Em todos os casos de d negativos, interpretou-se o valor absoluto como medida da magnitude do efeito.

O Cenário 2 considera uma temporariedade ampliada ($n = 10$), um diferimento elevado ($m = 55$) e uma diferença etária significativa entre os indivíduos ($y = x + 10$), o que pode gerar maior exposição ao risco de longevidade e ampliar os desafios na estimativa das rendas atuariais. A Tabela 9 apresenta as novas estatísticas.

Tabela 9 – Informações estatísticas dos valores da RA por produto e sexo (Cenário 2)

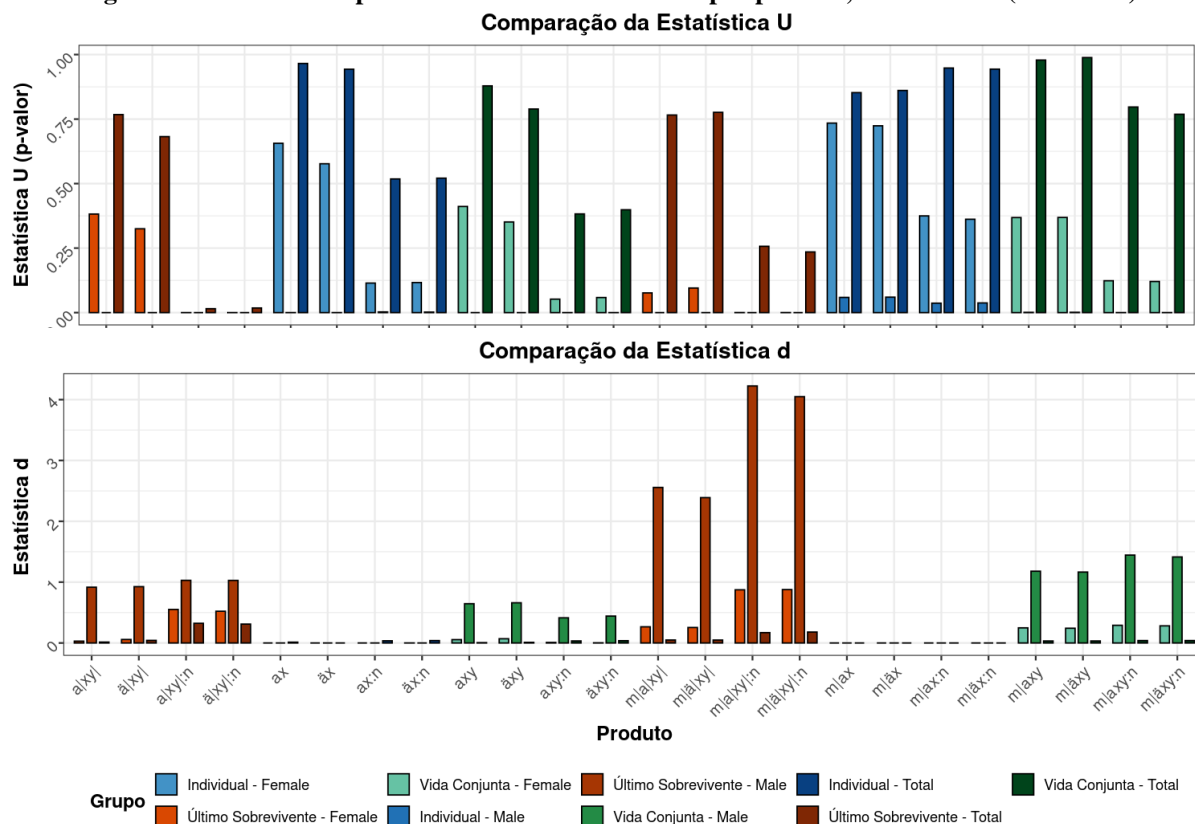
Produto	Feminino		Masculino		Total	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP
\ddot{a}_x	0,99	0,08	0,67	0,20	0,67	0,20
$\ddot{a}_{x:\overline{n} }$	1,00	0,04	0,86	0,17	0,86	0,17
$m \ddot{a}_x$	12,59	11,52	0,14	0,14	0,14	0,14
$m \ddot{a}_{x:\overline{n} }$	0,87	0,09	0,26	0,21	0,26	0,21
a_x	10,16	0,14	0,64	0,23	0,64	0,23
$a_{x:\overline{n} }$	1,00	0,06	0,84	0,21	0,84	0,21
$m a_x$	12,64	1,16	0,13	0,14	0,13	0,14
$m a_{x:\overline{n} }$	0,87	0,09	0,25	0,20	0,25	0,20
\ddot{a}_{xy}	0,99	0,08	0,67	0,19	0,67	0,19
$\ddot{a}_{xy:\overline{n} }$	1,00	0,04	0,86	0,17	0,86	0,17
$m \ddot{a}_{xy}$	11,51	10,74	0,05	0,05	0,05	0,05
$m \ddot{a}_{xy:\overline{n} }$	0,79	0,08	0,09	0,07	0,09	0,07
a_{xy}	10,10	0,14	0,63	0,22	0,63	0,22
$a_{xy:\overline{n} }$	1,00	0,06	0,83	0,21	0,83	0,21
$m a_{xy}$	11,49	10,76	0,05	0,05	0,05	0,05
$m a_{xy:\overline{n} }$	0,79	0,08	0,08	0,06	0,08	0,06
$\ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,97	0,06	0,79	0,21	0,79	0,21
$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
$m \ddot{a}_{\overline{xy}}$	0,87	0,08	0,24	0,10	0,24	0,10
$m \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n} }$	0,94	0,03	0,42	0,13	0,42	0,13
$a_{\overline{xy}}$	0,96	0,12	0,77	0,23	0,77	0,23
$a_{\overline{xy}:\overline{n} }$	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
$m a_{\overline{xy}}$	0,87	0,08	0,23	0,09	0,23	0,09
$m a_{\overline{xy}:\overline{n} }$	0,94	0,03	0,38	0,13	0,38	0,13

Fonte: Elaboração Própria (2025).

Nesse contexto, as anuidades imediatas mantêm médias próximas de 1,00 e DP baixos ($\leq 0,23$), indicando estabilidade independentemente do aumento de n . Enquanto as anuidades com longo diferimento apresentam médias muito altas (até 12,6 feminino) e grande dispersão (DP té 11,52), reforçando o diferimento como principal causa da volatilidade nas projeções de longo prazo (Cairns; Blake; Dowd, 2006; Plat, 2009).

Isso demonstra que as curvas de RA para as anuidades individuais, anteriormente quase imperceptível, tornam-se um pouco mais distintas. Entretanto, produtos de último sobrevivente ainda mantém perfil estável em ambos os cenários, exibindo apenas uma leve queda após o início da carência. A Figura 2 traz novamente estatísticas U e d .

Figura 2 – Gráficos comparativos das estatísticas U e d por produto, sexo e status (Cenário 2)



Fonte: Elaboração Própria (2025).

As anuidades simples mantêm efeitos práticos pequenos mesmo com diferimento prolongado (U alto, d baixos). Em contraste, vida conjunta e último sobrevivente mostram elevada sensibilidade estatística e prática: para último sobrevivente masculino, o efeito d chega a 4,22, indicando diferenças substanciais entre tábuas teóricas e paramétricas em situações de alta longevidade e longo prazo.

Assim, dentre os principais resultados, de acordo com as tabelas e figuras apresentadas, as tábuas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres apresentaram alta aderência às faixas etárias intermediárias e produtos sem diferimento, com p-valores elevados ($U \approx 0,9-0,99$; $d \approx 0$), confirmando sua calibração local eficaz conforme defendido Dickson, Hardy e Waters (2013). No entanto, em produtos com diferimento prolongado ($m = 55$) e múltiplas vidas, o desempenho caiu significativamente, com $d > 0,25$ e p-valores próximos de zero, principalmente no grupo masculino, evidenciando a limitação dessas tábuas em capturar a mortalidade avançadas (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

Já os ajustes com as leis de HP forneceram um desempenho superior. A 1ª Lei – versão B destacou-se no Feminino, (AIC a $-735,32$; $RMSE$ a $0,0339$), enquanto a 2ª Lei foi ideal para os grupos Masculino e Total ($AIC \approx -738,1$; $RMSE \approx 0,0332$; $R^2 \approx 0,96$), em linha com Wüthrich e Merz (2022), que recomendam alta parametrização para segmentos sensíveis da curva de mortalidade. Esses ajustes mantiveram boa performance, indicando que resistem bem ao “efeito cauda” e às incertezas de sobrevivência prolongada, conforme proposto por Plat (2009).

Por fim, a análise comparativa das RA revelou que, enquanto os produtos simples sem diferimento mantêm coeficientes de variação moderados ($DP \leq 0,15$) e curvas quase paralelas entre modelos teóricos e paramétricos, as anuidades diferidas sofrem alta volatilidade (DP até 15,16 no Cenário 1 e até 11,52 no Cenário 2), corroborando as conclusões de Bravo (2007) sobre o impacto dos prazos prolongados.

Portanto, recomenda-se a adoção das tábuas B-2006 H e Tabla de Mortalidad RV-2004 – Hombres em produtos simples de curto prazo, garantindo previsibilidade para os contratantes e evitando reajustes inesperados (Dickson; Hardy; Waters, 2013). Para contratos com carência prolongada ou múltiplas vidas, a aplicação das leis de HP ajustadas assegura provisões mais assertivas contra o risco de longevidade extrema, alinhando-se às recomendações de Wüthrich e Merz (2022).

Para as companhias chilenas, essa estratégia híbrida otimiza a tarifação básica em contextos de baixa incerteza enquanto fornece flexibilidade e fidelidade métrica em carteiras complexas, fortalecendo a solvência em um mercado marcado pela volatilidade demográfica (Cairns; Blake; Dowd, 2006).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises desenvolvidas ao longo deste trabalho demonstraram claramente como a escolha entre tábuas teóricas validadas e tábuas ajustadas por leis de mortalidade pode impactar significativamente a precificação de rendas atuariais.

Os resultados revelaram que, embora os testes de aderência frequentemente indiquem ausência de diferenças estatisticamente relevantes em cenários simplificados, os efeitos práticos – avaliados por métricas como o d de Cohen – podem ser substanciais, principalmente em produtos com longos períodos de diferimento ou múltiplas. Ao longo das faixas etárias analisadas, ficou evidente que em idades mais avançadas, onde a longevidade extrema é um fator crucial, as tábuas ajustadas por métodos paramétricos oferecem maior segurança na precificação (Plat, 2009).

Em cenários mais simples, como produtos imediatos e com períodos curtos de cobertura, as tábuas chilenas teóricas B-2006 H e RV-2004 mostraram-se altamente aderentes, facilitando operações atuariais mais ágeis e eficazes, alinhadas às recomendações da literatura para tábuas locais calibradas (Dickson; Hardy; Waters, 2013). No entanto, em estruturas complexas que envolvem períodos prolongados de diferimento ou múltiplas vidas, especialmente em produtos de vida conjunta e último sobrevivente, os ajustes paramétricos das leis de HP (1ª Lei versão B para Feminino e 2ª Lei para Masculino e Total) proporcionaram maior exatidão, reduzindo significativamente métricas de erro, refletindo de forma mais adequada as particularidades de cada grupo (Wüthrich; Merz, 2022).

Métodos simples, como tábuas teóricas, reduzem custos operacionais e podem gerar prêmios menores no curto prazo, mas elevam o risco de subprovisionamento e necessidade de ajustes futuros (McCarthy; Mitchell, 2000). Já métodos ajustados, embora mais caros, garantem prêmios mais estáveis e segurança financeira no longo prazo, sobretudo em produtos sensíveis à longevidade (Bravo, 2007; Plat, 2009).

Como limitação deste estudo, ressalta-se que os dados foram restritos ao contexto chileno e às tábuas específicas disponíveis, não contemplando plenamente realidades demográficas mais específicas ou mudanças recentes nos padrões de mortalidade.

Para trabalhos futuros, recomenda-se ampliar as análises utilizando bases de dados mais atualizadas e abrangentes, além de explorar técnicas avançadas como simulações estocásticas e métodos bayesianos, possibilitando uma visão ainda mais detalhada e robusta sobre precificação atuarial e gestão de riscos biométricos (Cairns; Blake; Dowd, 2006; Plat, 2009).

REFERÊNCIAS

ALBA, U. N. **Introducción a la estadística: Econometría y Biometría Actuarial**. Madrid: [s.n.], 1965.

BOATENG, Abigail Yeboah; OMARI-SASU, Akoto Yaw; BOATENG, Maxwell Akwasi. **Stochastic mortality models with birth cohort effects in older people: a systematic review**. African Journal of Empirical Research, v. 5, n. 4, p. 1496–1504, 2024.

BOOTH, H.; TICKLE, L. **Mortality modelling and forecasting: a review of methods**. Annals of Actuarial Science, v. 3, n. 1-2, p. 3-43, 2008.

BOWERS, Newton L.; GERBER, Hans U.; HICKMAN, James C.; JONES, Donald D. **Actuarial Mathematics**. 2. ed. [S.l.]: Society of Actuaries, 1997.

BRAVO, Jorge M. V. **Tábuas de mortalidade contemporâneas e prospectivas: modelos estocásticos, aplicações actuariais e cobertura do risco de longevidade**. 566 p. (Tese de Doutorado em Economia) | Universidade de Évora, Évora. 2007.

BROUHNS, Natacha; DENUIT, Michel; VERMUNT, Jeroen K. **A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables**. Insurance: Mathematics and Economics, v. 31, p. 373–393, 2002.

CAIRNS, Andrew J. G.; BLAKE, David; DOWD, Kevin. **A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration**. Journal of Risk and Insurance, v. 73, n. 4, p. 687-718, 2006.

CHAVES, Fernanda. **Os desafios do atuário do setor de seguros**. Revista Brasileira de Atuária, Rio de Janeiro, n. 1, p. 18-21, 2017.

CUI, Jiajia. **Longevity risk pricing**. Apresentado no Living to 100 and Beyond Symposium, Orlando, FL, 7 a 9 jan. 2008.

DIAS, Jaqueline L. **Aplicações da tabela de vida: um estudo sobre a mortalidade dos usuários do plano de saúde Pró-Saúde**. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciências Atuariais) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014. Disponível em: <https://bdm.unb.br/handle/10483/8698>. Acesso em: 20 jul. 2025.

DICKSON, David C. M.; HARDY, Mary R.; WATERS, Howard R. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. 2. ed. Cambridge University Press, New York: Sheridan Inc., 2013.



FERREIRA, Paulo Pereira. **Matemática Atuarial: riscos de pessoas**. Rio de Janeiro: ENSCPES, 2019. 260 p.

GUIMARÃES, Paulo Ricardo Bittencourt. **Métodos Quantitativos Estatísticos**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2008. 245 p.

HELIGMAN, L.; POLLARD, J. H. **The age pattern of mortality**. Journal Of The Institute Of Actuaries. United Kingdom, p. 49-80. jan. 1980.

HOGG, Robert V.; MCKEAN, Joseph W.; CRAIG, Allen T. **Introduction to Mathematical Statistics**. 8. ed. Harlow, Essex: Pearson Education Limited, 2020. ISBN 978-1-292-26476-9.

HUMAN MORTALITY DATABASE. Berkeley (CA) and Munich: University of California, Berkeley, and Max Planck Institute for Demographic Research, s.d. Disponível em: <https://mortality.org/>. Acesso em: 20 jul. 2025.

LAURETTO, Marcelo S. **Modelos paramétricos de mortalidade: aplicações no contexto brasileiro**. 2008. 211 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/95/95131/tde-16062008-130319/publico/lauretto.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2025.

LEE, Ronald D.; CARTER, Lawrence R. **Modeling and forecasting U.S. mortality**. Journal of the American Statistical Association, v. 87, n. 419, p. 659-671, 1992.

MCCARTHY, David; MITCHELL, Olivia S. **Assessing the impact of mortality assumptions on annuity valuation: Cross-country evidence**. In: North American Actuarial Journal, v. 4, n. 4, p. 31-52, 2000. Disponível em: <https://pensionresearchcouncil.wharton.upenn.edu/publications/papers-2018/assessing-the-impact-of-mortality-assumptions-on-annuity-valuation-cross-country-evidence/>. Acesso em: 20 jul. 2025.

MOSHER, Jessica. **Mortality and the provision of retirement income**. OECD Journal: Financial Market Trends, v. 2022/1, p. 43-65, 2022. Disponível em: https://www.oecd.org/en/publications/mortality-and-the-provision-of-retirement-income_a10a6c09-en.html. Acesso em: 20 jul. 2025.

OLIVEIRA, Mario de; BERTHO, Ana C. S.; COSTA, Bruno; SOMMERLATTE SILVA, Flávia; ALVES, Mariane B.; RAMOS RAMIREZ, Milton; BORGES, Rafael B. de R.; MARQUES, Reinaldo; ROSA, Ricardo M. da S.; PEREGRINO, Rodrigo L.; LOBO, Viviana das G. R.; FONSECA, Thais C. O. **Tábuas de mortalidade BR-EMS 2021 do mercado segurador brasileiro**. Revista Brasileira de Estudos de População, [S. l.], v. 40, p. 1–24, 2023. DOI: 10.20947/S0102-3098a0252. Disponível em: <https://rebep.org.br/revista/article/view/2264>. Acesso em: 20 jul. 2025.



PASCARIU, M. **MortalityLaws**: Parametric Mortality Models, Life Tables and HMD. R package version 2.1.0. 2024. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=MortalityLaws>. Acesso em: 20 jul. 2025.

PIRES, Magda Carvalho; CASTRO, Matheus Barros; LIEBER, Zaba Valtuille; MENEZES, Thais Pacheco; AOKI, Raquel Yuri da Silveira. **Estatística não paramétrica básica no software R**: uma abordagem por resolução de problemas. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2018.

PIRES, Danilo Machado; MARQUES, Reinaldo; FERREIRA, Leandro; COSTA, Leonardo Henrique. **Fundamentos da Matemática Atuarial**: vida e pensões. Curitiba: CRV, 2021. 304 p.

PLAT, Richard. **On stochastic mortality modeling**. Insurance: Mathematics and Economics, v. 45, n. 3, p. 393-404, 2009.

QUEIROZ, Bernardo L.; GONZAGA, Marcos Roberto; LIMA, Everton E. Campos De. **New and old paradigms on mortality**: evolution of mortality patterns in Latin America. In: IUSSP INTERNATIONAL CONFERENCE, 2013, Busan, South Korea. Anais do IUSSP International Conference, 2013.

RÍOS, Alejandro R.; PEÑA, Ana M. P. **Estadística inferencial. Elección de una prueba estadística no paramétrica en investigación científica**. Horizonte de la Ciencia, [S. l.], v. 10, n. 19, p. 191–208, 2020. DOI: 10.26490/uncp.horizonte.ciencia.2020.19.597. Disponível em: <https://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/597>. Acesso em: 20 jul. 2025.

RODRIGUES, José A. **Gestão de Risco Atuarial**. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2012. E-book. ISBN 9788502088986. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788502088986/>. Acesso em: 20 jul. 2025.

SOCIETY OF ACTUARIES. **Mortality tables**. Disponível em: <https://mort.soa.org/>. Acesso em: 20 jul. 2025.

SPIEGEL, Murray R.; SCHILLER, John J.; SRINIVASAN, R A. **Probabilidade e estatística. (Schaum)**. Porto Alegre: Grupo A, 2013. E-book. ISBN 9788565837477. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837477/>. Acesso em: 20 jul. 2025.

WÜTHRICH, Mario V.; MERZ, Michael. **Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications**. 1. ed. Cham: Springer, 2022. 605 p. (Springer Actuarial). ISBN 978-3-031-12409-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9>. Acesso em: 20 jul. 2025.